Communication, consensus et ordre de parole. Qui veut parler en premier ?

Nicolas Houy, Lucie Ménager

Communication, consensus et ordre de parole. Qui veut parler en premier?

N. Houy[⋆] L. Ménager[†]
nhouy@free.fr menager@univ-paris1.fr

[⋆]THEMA
Université Cergy-Pontoise
33 Boulevard du Port
95011 Cergy-Pontoise – FRANCE

[†]Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Centre d'Economie de la Sorbonne
106-112 Boulevard de l'Hôpital
75647 Paris Cedex 13 – FRANCE

Résumé :

Parikh et Krasucki [1990] montrent que si des agents communiquent la valeur d'une fonction f selon un protocole sur lequel ils se sont préalablement entendus, alors ils atteindront un consensus sur la valeur de f, à condition que le protocole soit *équitable* et la fonction f *convexe*. On remarque que la valeur consensuelle de f ainsi que le montant d'information apprise par les agents au cours du processus de communication dépendent du protocole choisi. Si les agents communiquent afin d'apprendre de l'information, il est alors possible que certains d'entre eux soient en désaccord quant au protocole de communication à utiliser. On montre que s'il est connaissance commune que deux agents ont des préférences opposées sur deux protocoles, alors le consensus qui émergerait de l'utilisation de l'un ou l'autre protocole est le même.

Mots-clés : Connaissance commune, consensus, protocoles de communication.

Abstract:

Parikh and Krasucki [1990] showed that if rational agents communicate the value of a function f according to a protocol upon which they have agreed beforehand, they will eventually reach a consensus about the value of f, provided a *fairness* condition on the protocol and a *convexity* condition on the function f. In this article, we address the issue of how agents agree on a communication protocol in the case where they communicate in order to learn information. We show that if it is common knowledge among a group of agents that some of them disagree about two protocols, then the consensus value of f must be the same according to the two protocols.

Keywords: Common knowledge, consensus, communication protocols.

1 Introduction

Considérons l'exemple introductif suivant. Alice et Bob sont assis l'un en face de l'autre, chacun portant un chapeau dont ils ne savent pas la couleur, mais dont ils savent qu'il peut être rouge ou blanc. Supposons que les deux chapeaux soient blancs, et que quelqu'un demande aux enfants la probabilité qu'ils attribuent à l'événement "Les deux chapeaux sont rouges". Comme chacun des enfants voit que le chapeau de l'autre est blanc, chacun sait que la probabilité que les deux chapeaux soient rouges est 0. Supposons qu'Alice s'exprime la première, et dise que la probabilité est 0. Bob le savait déjà, mais l'annonce d'Alice lui permet d'apprendre que son propre chapeau est blanc. En effet, si son chapeau avait été rouge, alors Alice n'aurait pas pu éliminer complètement la possibilité que les deux chapeaux soient rouges. Si Bob s'exprime à son tour, et dit qu'il pense aussi que la probabilité est 0, alors Alice n'apprendra rien, ni sur la probabilité de l'événement "Les deux chapeaux sont rouges", ni sur la couleur de son chapeau. En effet, puisqu'elle sait qu'elle a révélé à Bob que son chapeau à lui était blanc, elle sait aussi qu'il sait désormais qu'il n'y a aucune chance que les deux chapeaux soient rouges, indépendamment de la couleur de son chapeau à elle. Par conséquent, si Alice veut apprendre la couleur de son chapeau, elle n'a aucun intérêt à parler la première. Cet exemple illustre le fait suivant. Lorsque les individus communiquent dans le but d'apprendre de l'information les uns des autres, l'ordre de parole est important : l'issue d'un processus d'échange d'informations entre les individus dépend, de manière cruciale, de la façon dont la communication est structurée.

On sait depuis Geanakoplos et Polemarchakis [1982] que lorsque des agents rationnels communiquent puis révisent les probabilités *a posteriori* qu'ils attribuent à un événement donné selon un protocole de communication public et simultané, alors ces agents atteignent un *consensus* sur la probabilité de cet événement, c'est-à-dire finissent par tous communiquer la même probabilité. Cave [1983] et Bacharach [1985] ont étendu ce résultat au cas où les agents communiquent des *décisions*, en supposant que la manière dont les agents forment leurs décisions satisfait à une condition de cohérence, appelée *stabilité par l'union*. Cependant, dans la plupart des situations où les individus sont amenés à échanger entre eux des informations, la communication n'est pas simultanée. Les individus s'expriment, en général, les uns à la suite des autres, selon un protocole de communication donné. Parikh et Krasucki [1990] étudièrent le cas dans lequel les membres d'un groupe communiquent deux-à-deux la valeur privée d'une certaine fonction f. Ils identifient des conditions sur la fonction f et sur le protocole de communication qui garantissent que les agents atteignent un consensus sur la valeur de la fonction. Ils montrent que si le protocole de communication est *équitable*, c'est-à-dire tel que chaque participant reçoive de l'information, même indirectement, de la part de tous les autres participants, et si la fonction dont les valeurs sont communiquées est *convexe*, c'est à-dire si pour toute paire d'événements disjoints X, X', il existe $a \in]0,1[$ tel que $f(X \cup X') = af(X) + (1-a)f(X')$, alors la communication permet aux agents d'atteindre un consensus sur la valeur de f.

Dans cet article, on s'intéresse aux conséquences du choix d'un protocole de communication, dans un cadre où les individus veulent apprendre le plus d'information possible des autres. La valeur du consensus atteint, ainsi que la quantité d'information apprise par les agents au cours du processus de communication, dépendent du protocole choisi pour communiquer (qui parle quand). En particulier, il peut arriver qu'un agent apprenne plus d'information en communiquant avec les autres selon un certain protocole que selon un autre. Il peut également arriver que les protocoles les plus informatifs ne soient pas les mêmes pour tous les agents. Ainsi, si l'on fait l'hypothèse que les agents communiquent afin d'apprendre de l'information, il peut arriver qu'ils soient en désaccord quant au protocole de communication à utiliser. Selon l'état du monde, Alice et Bob peuvent préférer parler en premier ou en second, ou être indifférents. Si ni Alice, ni Bob ne veut parler en premier, la communication ne peut pas avoir lieu. Cependant, pouvons nous en conclure qu'Alice et Bob n'apprendront rien l'un de l'autre ? Le fait même que chaque enfant ne veuille pas parler en premier est informatif pour l'autre. L'objet de cet article est précisément d'étudier les inférences que des agents rationnels peuvent faire de la connaissance commune que certains d'entre eux sont en désaccord quant au protocole de communication à utiliser.

Nous montrons que les situations suivantes sont possibles. Tout d'abord, il peut être connaissance commune dans un groupe d'agents que certains d'entre eux préfèrent le même protocole de communication. Ensuite, il peut être connaissance commune que deux agents soient en désaccord quant au protocole qu'ils préfèrent utiliser pour communiquer. Cependant, on montre le résultat surprenant que dans ce cas, le consensus qui émergera de l'utilisation de l'un ou l'autre protocole sera le même. A titre d'exemple, s'il est connaissance commune entre Alice et Bob que tous les deux préfèrent parler en deuxième, alors la probabilité sur laquelle ils se mettront d'accord à l'issue du processus de communication sera la même, qu'Alice ou Bob parle en premier.

L'article est organisé de la manière suivante. En section 2, on présente le modèle et on rappelle le résultat de Parikh et Krasucki [1990]. En section 3, on définit les préférences sur les protocoles de communication et on présente le résultat principal. En Section 4, on donne une série de résultats de possibilité autour du résultat principal, et on discute de la manière dont on définit les préférences en section 5. La démonstration du théorème est présentée en annexe.

2 Notions préliminaires

Soit Ω l'ensemble des états du monde, supposé fini, et 2^{Ω} l'ensemble des événements possibles de Ω. On considère N agents, chaque agent i étant informé par une partition Π_i de Ω. Lorsque l'état $\omega \in \Omega$ se réalise, l'agent i est informé que l'état du monde appartient à $\Pi_i(\omega)$, c'est-à-dire à la cellule de la partition de i qui contient ω. On dit qu'une partition Π est *plus fine* qu'une partition Π' si et seulement si pour tout ω, $\Pi(\omega) \subset \Pi'(\omega)$ et s'il existe ω' tel que $\Pi(\omega') \subsetneq \Pi'(\omega')$. Une partition Π' est *plus grossière* qu'une partition Π si et seulement si Π est plus fine que Π'. La partition Π_i représente la capacité de l'agent i à distinguer entre eux les états du monde. Ainsi, plus la partition d'un agent est fine, plus son information est précise, dans le sens où l'agent est capable de mieux distinguer les états du monde. On dit qu'un agent i muni d'une partition Π_i sait l'événement E sous l'état ω si et seulement si $\Pi_i(\omega) \subset E$. On définit l'*union* des partitions individuelles $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_N$ comme le plus fin grossissement commun de ces partitions, c'est-à-dire la plus fine partition M telle que pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $i = 1, \ldots, N$, $\Pi_i(\omega) \subset M(\omega)$.

Un événement E est dit connaissance commune sous l'état ω dans un groupe d'agents lorsque E est réalisé sous ω, que chacun sait sous ω que E est réalisé, que chacun sait sous ω que chacun sait que E s'est réalisé etc... Aumann [1976] montra que, étant donné un groupe de N agents, l'union de leurs N partitions individuelles est la partition de connaissance commune dans le groupe d'agents. Par conséquent, on dit qu'un événement E est connaissance commune en ω si et seulement si $M(\omega) \subset E$.

Avant de communiquer, les agents se mettent d'accord sur un protocole de communication qui sera appliqué tout au long du débat. Le protocole détermine quels agents sont autorisés à s'exprimer et quels agents sont autorisés à écouter à chaque date.

Définition 1 *Un protocole α est une paire de fonctions (s, r) définies de $\mathbb{N}$ dans $2^{\{1,\ldots,N\}} \times 2^{\{1,\ldots,N\}}$. Si $s(t) = S$ et $r(t) = R$, alors on interprète S et R comme les ensembles d'émetteurs et de récepteurs de la communication qui a lieu à la date t.*

Notons que le type de protocoles que l'on considère ici est plus général que celui considéré par Parikh et Krasucki, car l'on permet à plusieurs agents d'être émetteurs et récepteurs de la communication au même moment.

Au cours du débat, les agents communiquent en envoyant des messages, dont on suppose qu'ils sont délivrés instantanément. Autrement dit, à la date t, les messages sont simultanément envoyés par les agents $i \in s(t)$ et reçus par les agents $j \in r(t)$. On suppose que le message envoyé par un agent est la valeur privée d'une certaine fonction f, définie de l'ensemble des événements 2^Ω dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, un agent dont l'information privée est $X \subset \Omega$ communique la valeur $f(X)$.

Enfin, l'ensemble des états du monde Ω, les partitions individuelles $(\Pi_i)_i$, ainsi que la règle de message f définissent un *modèle d'information* $I = \langle \Omega, (\Pi_i)_i, f \rangle$.

Décrivons à présent la manière dont l'information privée des agents évolue au cours du du processus de communication. A la date t, tous les émetteurs $i \in s(t)$ sélectionnés par le protocole $\alpha = (s, r)$ envoient un message qui est entendu par tous les récepteurs $j \in r(t)$. Chaque agent infère alors l'ensemble des états du monde compatibles avec les messages éventuellement envoyés, et révise sa partition d'information en fonction. Etant donnés un modèle d'information $\langle \Omega, (\Pi_i)_i, f \rangle$ et un protocole de communication α, on définit par récurrence sur t l'ensemble $\Pi_i^\alpha(\omega, t)$ des états possibles pour l'agent i en ω et à la date t, étant donné le protocole de communication α :

$\Pi_i^\alpha(\omega, 0) = \Pi_i(\omega)$ et pour tout $t \geq 1$,
$\Pi_i^\alpha(\omega, t+1) = \Pi_i^\alpha(\omega, t) \cap \{\omega' \in \Omega \mid f(\Pi_j^\alpha(\omega', t)) = f(\Pi_j^\alpha(\omega, t)) \; \forall\, j \in s(t)\}$ si $i \in r(t)$,
$\Pi_i^\alpha(\omega, t+1) = \Pi_i^\alpha(\omega, t)$ sinon.

Deux hypothèses sont faites sur le protocole de communication α et sur la fonction f pour garantir que la communication itérative de la valeur de f conduise à un consensus sur f. A l'instar de Parikh et Krasucki, on suppose que le protocole de communication est *équitable*. Nous adoptons la définition de Koessler [2001], qui adapte celle de Parikh et Krasucki au type de protocoles que l'on considère : un protocole est *équitable* si et seulement si tous les participants à ce protocole communiquent directement ou indirectement avec tous les autres. Cette condition est nécessaire pour qu'aucun agent ne soit exclu de la communication.

Hypothèse 1 (A1) *Le protocole α est équitable, i.e. pour toute paire d'individus (i, j), $i \neq j$, il existe un nombre infini de suites finies $t_1 < \cdots < t_K$, avec $t_k \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$, telles que $i \in s(t_1)$ et $j \in r(t_K)$.*

Hypothèse 2 (A2) *f est convexe, i.e. pour toute paire d'événements $E, E' \subset \Omega$ tels que $E \cap E' = \emptyset$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(E \cup E') = \alpha f(E) + (1-\alpha) f(E')$.*

Cette condition est satisfaite par les probabilités conditionnelles, et implique la condition de *stabilité par l'union*[1] à la Cave [1983].

Le prochain résultat établit que, sous les hypothèse d'équité du protocole et de convexité de la fonction f, $f(\Pi_i^\alpha(\omega, t))$ admet une valeur limite pour tout ω qui ne dépend pas de i. Autrement dit, sous les hypothèses $A1$ et $A2$, les participants au protocole convergent vers un consensus sur la valeur de f.

Proposition 1 (Parikh and Krasucki (1990)) *Soit $\langle \Omega, (\Pi_i)_i, f \rangle$ un modèle d'information, et α un protocole de communication. Sous les hypothèses $A1$ et $A2$, il existe une date T telle que pour tout ω, pour tous i, j, et tous $t, t' \geq T$, $f(\Pi_i^\alpha(\omega, t)) = f(\Pi_j^\alpha(\omega, t'))$.*

Dans la suite, on notera $\Pi_i^\alpha(\omega)$ la valeur limite de $\Pi_i^\alpha(\omega, t)$, et Π_i^α sera appelée la partition d'information de l'agent i au consensus. La valeur limite de $f(\Pi_i^\alpha(\omega, t))$, qui ne dépend pas de i, sera notée $f(\Pi^\alpha(\omega))$ et sera appelée *valeur consensuelle* de f sous l'état ω, étant donné le protocole α.

[1] f est stable par l'union si pour tous $E, E' \subset \Omega$ tels que $E \cap E' = \emptyset, f(E) = f(E') \Rightarrow f(E \cup E') = f(E) = f(E')$.

3 Qui veut parler en premier ? Un théorème d'impossibilité.

On fait l'hypothèse que les agents sont des preneurs de décision, qui désirent être mieux informés au sens de Blackwell [1983]. Une partition Π est plus informative, au sens de Blackwell, qu'une partition Π', si et seulement si Π est *plus fine* que Π'. Ainsi, on dira qu'un agent est mieux informé avec un protocole α qu'avec un protocole β si, au bout du compte, il a une partition au consensus plus fine avec α qu'avec β. La préférence pour plus d'information induit alors une préférence dépendante des états pour chaque agent sur l'ensemble des protocoles. On dit qu'un agent préfère un protocole α à un protocole β sous l'état ω si il croit, lorsque l'état ω s'est réalisé, qu'il aura une partition plus fine avec α qu'avec β.

Définition 2 (Préférences) *Soit $I := \langle \Omega, (\Pi_i)_{1 \leqslant i \leqslant 0}, f \rangle$ un modèle d'information, et α, β deux protocoles distincts. L'événement "i préfère α à β" est noté $B_i^I(\alpha, \beta)$, et est défini de la manière suivante : $B_i^I(\alpha, \beta) = \{\omega \in \Omega \mid \forall \omega' \in \Pi_i(\omega),\ \Pi_i^\alpha(\omega') \subset \Pi_i^\beta(\omega')$ et $\exists\ \omega'' \in \Pi_i(\omega)$ s.t. $\Pi_i^\alpha(\omega'') \subsetneq \Pi_i^\beta(\omega'')\}$*

Considérons à nouveau l'exemple des deux enfants donné en introduction, et décrivons le formellement. Il y a quatre états du monde, chaque état décrivant les couleurs des chapeaux d'Alice et de Bob. Ainsi, un état est noté $(A_c B_{c'})$, avec $c, c' \in \{r, w\}$ désignant les couleurs des deux chapeaux. Supposons sans perte de généralité qu'Alice et Bob aient une probabilité *a priori* uniforme sur l'ensemble des états du monde. Ils expriment chacun leur tour la probabilité *a posteriori* qu'ils attribuent au fait que les deux chapeaux soient rouges, c'est-à-dire leur valeur privée de la fonction $f(.) = P(\{(A_r B_r)\} \mid .)$. Chacun des enfants observe le chapeau de l'autre, mais ne connaît pas la couleur de son propre chapeau. Par conséquent, Alice et Bob sont munis des partitions d'information suivantes :[2]

$$\Pi_A : \{(A_r B_r), (A_w B_r)\}_{\frac{1}{2}}\ \{(A_r B_w), (A_w B_w)\}_0$$

$$\Pi_B : \{(A_r B_r), (A_r B_w)\}_{\frac{1}{2}}\ \{(A_w B_r), (A_w B_w)\}_0$$

Si Alice parle en premier (protocole α), les partitions individuelles au consensus sont :

$$\Pi_A^\alpha : \{(A_r B_r)\}_1\ \{(A_w B_r)\}_0\ \{(A_r B_w), (A_w B_w)\}_0$$

$$\Pi_B^\alpha : \{(A_r B_r)\}_1\ \{(A_r B_w)\}_0\ \{(A_w B_r)\}_0\ \{(A_w B_w)\}_0$$

Si Bob parle en premier (protocole β), les partitions individuelles au consensus sont :

$$\Pi_A^\beta : \{(A_r B_r)\}_1\ \{(A_w B_r)\}_0\ \{(A_r B_w)\}_0\ \{(A_w B_w)\}_0$$

$$\Pi_B^\beta : \{(A_r B_r)\}_1\ \{(A_r B_w)\}_0\ \{(A_w B_r), (A_w B_w)\}_0$$

Si les deux chapeaux sont blancs, (*i.e.* dans l'état $(A_w B_w)$), Alice et Bob sont tous les deux mieux informés lorsqu'ils parlent en second. Que se passe-t-il dans ce cas ? Supposons que l'état $(A_w B_w)$ se réalise, et qu'Alice et Bob attendent, face à face, que l'autre se décide à parler en premier. Alice sait que l'état du monde appartient à $\{(A_r B_w), (A_w B_w)\}$. Puisque Bob ne veut pas parler en premier, elle comprend que le vrai état du monde n'est pas $(A_r B_w)$, puisque Bob aurait été indifférent entre parler en premier et en second dans cet état. De même, Bob sait que l'état du monde appartient à $\{(A_w B_r), (A_w B_w)\}$. Il déduit du fait qu'Alice ne veut pas parler en premier que l'état du monde n'est pas $(A_w B_r)$, puisque, dans cet état, Alice aurait été indifférente entre parler en premier et en deuxième. Ainsi, le fait de savoir que l'autre ne veut pas parler en premier permet à Alice et Bob de comprendre

[2] L'indice indique la probabilité *a posteriori* correspondante à chaque cellule.

que l'état du monde est $(A_w B_w)$, c'est-à-dire que les deux chapeaux sont blancs. A partir de ce moment, ils possèdent tous les deux la même information privée sous l'état $(A_w B_w)$, et deviennent tous les deux indifférents entre parler en premier et en deuxième. Cet exemple soulève ainsi la question de savoir s'il peut être connaissance commune entre deux agents qu'ils soient en désaccord quant au protocole de communication qu'ils préfèrent pour communiquer. Plus généralement, quelles inférences des agents rationnels peuvent-ils faire de la connaissance commune que certains d'entre eux sont en désaccord sur le protocole de communication à utiliser ?

On présente maintenant le résultat principal de cet article, qui établit en particulier que, dans ce cas, la valeur du consensus atteint sera la même, quel que soit le protocole utilisé.

Théorème 1 *Soit* $I = \langle \Omega, (\Pi_i)_i, f \rangle$ *un modèle d'information tel que* $A1$ *et* $A2$ *sont satisfaites, et* α *et* β *deux protocoles distincts. Considérons* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{\alpha, \beta\}$*, avec* $a_1 \neq a_2$ *et* $b_1 \neq b_2$*, et considérons deux agents* $i \neq j$*.*

Enfin, considérons les trois assertions suivantes :

(1) $B_i^I(a_1, a_2)$ *et* $B_j^I(b_1, b_2)$ *sont connaissance commune en* ω*.*

(2) $\omega \in B_i^I(a_1, a_2) \cap B_j^I(b_1, b_2)$ *et* $a_1 = b_2$*.*

(3) $f(\Pi^\alpha(\omega)) \neq f(\Pi^\beta(\omega))$*.*

Les assertions (1)*,* (2)*, et* (3) *ne peuvent pas être vraies simultanément.*

L'assertion (1) signifie que les préférences de i et de j concernant α et β sont connaissance commune en ω. L'assertion (2) signifie que i et j sont en désaccord quant au protocole qu'ils préfèrent en ω (soit i préfère α et j préfère β en ω, soit i préfère β et j préfère α en ω). L'assertion (3) signifie que la valeur consensuelle de f sous l'état ω n'est pas la même selon le protocole utilisé. La signification de ce théorème dans l'exemple donné en introduction est la suivante :

• Si (1) et (2) sont vraies, c'est-à-dire s'il est connaissance commune en ω qu'Alice et Bob préfèrent parler en deuxième, alors (3) est fausse, *i.e* la valeur consensuelle de f sous ω est la même, qu'Alice ou Bob parle en premier.

• Si (1) et (3) sont vraies, c'est-à-dire s'il est connaissance commune en ω qu'Alice préfère $a_1 \in \{\alpha, \beta\}$ et que Bob préfère $b_1 \in \{\alpha, \beta\}$, et si la valeur consensuelle de f diffère selon que le protocole est α ou β, alors (2) est fausse, *i.e* Alice et Bob préfèrent le même protocole en ω ($a_1 = b_1$).

• Si (2) et (3) sont vraies, c'est-à-dire si Alice et Bob ont des préférences opposées sur α et β en ω, et si la valeur consensuelle de f diffère selon que le protocole est α ou β, alors (1) est fausse, *i.e* les préférences d'Alice ou de Bob ne sont pas connaissance commune en ω.

4 Résultats de possibilité

Dans cette section, on donne quelques résultats de possibilités autour du Théorème 1. Notons d'abord que le résultat d'impossibilité du Théorème 1 n'est pas dû au fait que deux des trois assertions ne peuvent pas être vraies simultanément. En effet, il suffit de retirer n'importe laquelle des trois assertions pour restaurer la possibilité.

Proposition 2 *(i) Les assertions* (1) *et* (2) *du Théorème 1 peuvent être vraies simultanément.*

(ii) Les assertions (1) *et* (3) *du Théorème 1 peuvent être vraies simultanément.*

(iii) Les assertions (2) *et* (3) *du Théorème 1 peuvent être vraies simultanément.*

Dans le cadre de l'exemple d'Alice et Bob, cette proposition établit que (i) il peut être connaissance commune entre eux que Alice et Bob préfèrent différents protocoles, (ii) il peut être connaissance commune entre eux qu'Alice et Bob préfèrent le même protocole entre α et β, et que la valeur consensuelle de f ne soit pas la même selon α ou β, et (iii) Alice et Bob peuvent avoir des préférences opposées sur α et β, alors que α et β conduisent à des valeurs consensuelles de f différentes.

On montre le point (i) à l'aide de l'exemple suivant, qui décrit une situation où il est connaissance commune entre Alice et Bob que tous les deux préfèrent parler en second. Le fait qu'ils préfèrent parler en second est relativement intuitif : lorsqu'un individu n'est pas le premier à parler, le premier message qu'il entend ne dépend que de l'information privée de l'autre agent. Cependant, il peut être connaissance commune que deux agents préfèrent parler en premier.[3]

Exemple 1 *Soit* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *l'ensemble des états du monde. Supposons qu'Alice et Bob soient munis d'une probabilité a priori* P *uniforme sur* Ω*. Ils communiquent tour à tour leur valeur privée de la fonction* $f(.) = P(\{1,2,7\} \mid .)$*, et sont dotés des partitions d'information suivantes :*

$$\Pi_A = \{1,2\}_1\{3,4\}_0\{5,6,7\}_{1/3}$$
$$\Pi_B = \{1,7\}_1\{2,3,6\}_{1/3}\{4,5\}_0$$

Si Alice parle en premier (protocole α*), les partitions d'information au consensus sont :*

$$\Pi_A^\alpha = \{1,2\}_1\{3,4\}_0\{5,6\}_0\{7\}_1$$
$$\Pi_B^\alpha = \{1\}_1\{2\}_1\{3\}_0\{4\}_0\{5\}_0\{6\}_0\{7\}_1$$

Si Bob parle en premier (protocole β*), les partitions d'information au consensus sont :*

$$\Pi_A^\beta = \{1\}_1\{2\}_1\{3\}_0\{4\}_0\{5\}_0\{6\}_0\{7\}_1$$
$$\Pi_B^\beta = \{1,7\}_1\{2\}_1\{3,6\}_0\{4,5\}_0$$

Dans chaque état du monde, Alice et Bob préfèrent parler en second : $B_A(\beta,\alpha) = B_B(\alpha,\beta) = \Omega$. Il est, par conséquent, connaissance commune en chaque état du monde qu'Alice préfère le protocole β et Bob le protocole α. Cependant, cela ne contredit pas le Théorème 1, puisque pour tout ω, $f(\Pi^\alpha(\omega)) = f(\Pi^\beta(\omega))$.

On montre le point (ii) à l'aide de l'exemple suivant, dans lequel il est connaissance commune que deux agents préfèrent le même protocole parmi α et β, alors que la valeur consensuelle de f n'est pas la même selon que le protocole utilisé est α ou β.

Exemple 2 *Soit* $\Omega = \{1,\ldots,9\}$ *l'ensemble des états du monde. Supposons qu'Alice et Bob aient une probabilité a priori* P *uniforme sur* Ω*. Ils communiquent tour à tour leur valeur privée de la fonction* $f(.) = P(\{1,6,7,9\} \mid .)$*, et sont dotés des partitions d'information suivantes :*

$$\Pi_A = \{1,2,4,5,9\}_{\frac{2}{5}}\{3,6,7,8\}_{\frac{1}{2}}$$
$$\Pi_B = \{1,3,7\}_{\frac{1}{3}}\{2,5,8\}_0\{4,6,9\}_{\frac{2}{3}}$$

Si Alice parle en premier (protocole α*), les partitions d'information au consensus sont :*

$$\Pi_A^\alpha = \{1\}_1\{2,5\}_0\{4,9\}_{\frac{1}{2}}\{3,7\}_{\frac{1}{2}}\{6\}_1\{8\}_0$$
$$\Pi_B^\alpha = \{1\}_1\{2,5\}_0\{4,9\}_{\frac{1}{2}}\{3,7\}_{\frac{1}{2}}\{6\}_1\{8\}_0$$

Si Bob parle en premier (protocole β*), les partitions d'information au consensus*

[3] Cet exemple n'est pas présenté ici car il implique 288 états du monde, mais il est disponible sur demande.

sont :

$$\Pi_A^\beta = \{1,4,9\}_{\frac{2}{3}}\{2,5\}_0\{3,6,7\}_{\frac{2}{3}}\{8\}_0$$
$$\Pi_B^\beta = \{1,3,7\}_{\frac{2}{3}}\{2,5,8\}_0\{4,6,9\}_{\frac{2}{3}}$$

Dans chaque état du monde, Alice et Bob préfèrent que Alice parle en premier : $B_A(\alpha,\beta) = B_B(\alpha,\beta) = \Omega$. Il est, par conséquent, connaissance commune entre eux qu'Alice et Bob préfèrent le protocole α. Cependant, cela ne contredit pas le Théorème 1, puisque $f(\Pi^\alpha(1)) \neq f(\Pi^\beta(1))$.

Enfin, on montre le point (iii) avec l'exemple suivant, dans lequel la valeur consensuelle de f n'est pas la même avec α et β en un certain état, alors même que les deux agents sont en désaccord quant au protocole qu'ils préfèrent parmi α et β en cet état.

Exemple 3 *Soit $\Omega = \{1,\ldots,13\}$ l'ensemble des états du monde. Supposons que Alice et Bob aient une probabilité a priori P uniforme sur Ω. Ils communiquent tour à tour la valeur privée de la fonction $f(.) = P(\{2,3,4,8,12\} \mid .)$, et sont dotés des partitions d'information suivantes :*

$$\begin{aligned}\Pi_A = {} & \{1,3,7,8\}_{\frac{1}{2}}\{2,6,11,12\}_{\frac{1}{2}}\{4,5,10\}_{\frac{1}{3}} \\ & \{9\}_0\{13\}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_B = {} & \{1,3,5\}_{\frac{1}{3}}\{2\}_1\{4,7,9,10,12,13\}_{\frac{1}{3}} \\ & \{6,8\}_{1/2}\{11\}_0\end{aligned}$$

Si Alice parle en premier (protocole α), les partitions d'information au consensus sont :

$$\begin{aligned}\Pi_A^\alpha = {} & \{1,3,7,8\}_{\frac{1}{2}}\{2\}_1\{11\}_0\{6,12\}_{\frac{1}{2}} \\ & \{4,10\}_{\frac{1}{2}}\{5\}_0\{9\}_0\{13\}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_B^\alpha = {} & \{1,3\}_{\frac{1}{2}}\{5\}_0\{2\}_1\{4,10\}_{\frac{1}{2}}\{7,12\}_{\frac{1}{2}} \\ & \{9,13\}_0\{6,8\}_{\frac{1}{2}}\{11\}_0\end{aligned}$$

Si Bob parle en premier (protocole β), les partitions d'information au consensus sont :

$$\begin{aligned}\Pi_A^\beta = {} & \{1,3,7\}_{\frac{1}{3}}\{8\}_1\{2\}_1\{6\}_0\{11\}_0\{12\}_1 \\ & \{4,5,10\}_{\frac{1}{3}}\{9\}_0\{13\}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_B^\beta = {} & \{1,3,5\}_{\frac{1}{3}}\{2\}_1\{4,7,10,\}_{\frac{1}{3}}\{12\}_1 \\ & \{9,13\}_0\{6\}_0\{8\}_1\{11\}_0\end{aligned}$$

La partition de connaissance commune est $M = \{\Omega\}$. Sous l'état 1, Alice et Bob préfèrent tous les deux parler en deuxième, et $f(\Pi^\alpha(1)) = 1/3 \neq f(\Pi^\beta(1)) = 1/2$. Cependant, cela ne contredit pas le résultat du Théorème 1, puisqu'il n'est pas *connaissance commune* que Bob préfère parler en deuxième. En effet, Bob préfère parler en premier dans les états 6 et 8.

Le Théorème 1 montre en particulier que la connaissance commune en ω que i et j sont en désaccord à propos de α et β implique que la valeur consensuelle de f en ω est la même avec les protocoles α et β. Soulignons ici que ce résultat n'est pas dû au fait que, dans ce cas, les événements devenus connaissance commune en ω entre les agents, à l'issue de la communication, sont les mêmes, quelque soit le protocole. Si c'était le cas, l'égalité des valeurs consensuelles de f émergerait alors comme une conséquence.

Proposition 3 *Soit $I = \langle\Omega, (\Pi_i)_{1\leqslant i\leqslant N}, f\rangle$ un modèle d'information tel que $A1$ et $A2$ sont satisfaites, et α, β deux protocoles de communication distincts. Considérons $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{\alpha,\beta\}$, avec $a_1 \neq a_2$ et $b_1 \neq b_2$, et considérons $i \neq j$. Enfin, considérons les trois assertions suivantes :*

(1) $B_i^I(a_1,a_2)$ et $B_j^I(b_1,b_2)$ sont connaissance commune en ω.

(2) $\omega \in B_i^I(a_1,a_2) \cap B_j^I(b_1,b_2)$ et $a_1 = b_2$.

(3) $\Pi^\alpha(\omega) \neq \Pi^\beta(\omega)$.

Les assertions (1), (2), et (3) peuvent être vraies simultanément.

On montre cette proposition grâce à l'Exemple 1, dans lequel il est connaissance commune en chaque état du monde que Alice et Bob préfèrent parler en second. Dans cet exemple, les partitions de connaissance commune au consensus sont $\Pi^{\alpha} = \{1,2\}\{3,4\}\{5,6\}\{7\}$ si Alice parle en premier, et $\Pi^{\beta} = \{1,7\}\{2\}\{3,6\}\{4,5\}$ si Bob parle en premier. Sous l'état 1 par exemple, $\Pi^{\alpha}(1) = \{1,2\} \neq \Pi^{\beta}(1) = \{1,7\}$, bien que l'on ait $f(\Pi^{\alpha}(1)) = f(\Pi^{\beta}(1))$ d'après le Théorème 1.

On sait depuis Geanakoplos et Polemarchakis [1982] que le consensus obtenu grâce à la communication peut être inefficace, au sens où la valeur consensuelle de la fonction peut être différente de celle qui aurait été obtenue si tous les individus avaient "partagé" leur information privée. Formellement, étant donné un protocole α, il est possible que $f(\Pi^{\alpha}(\omega)) \neq f(J(\omega))$, où $J(\omega) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \Pi_i(\omega)$. Lorsque deux individus sont en désaccord à propos de α et β, alors chacun d'entre eux a une partition au consensus plus fine avec l'un des deux protocoles. On peut ainsi se demander si la connaissance commune que deux agents sont en désaccord, à propos de deux protocoles, a des répercussions positives sur l'efficacité du consensus qui en résultera.

Le contre-exemple suivant montre que la connaissance commune que deux agents sont en désaccord à propos de α et β n'implique pas que le consensus obtenu avec α et β soit efficace.

Exemple 4 *Soit $\Omega = \{1, \ldots, 19\}$ l'ensemble des états du monde, et supposons que Alice et Bob aient une probabilité a priori P uniforme sur Ω. Ils communiquent tour à tour leur valeur privée de la fonction $f(.) = P(\{1,3,6,7,8,9,13,17,18\} \mid .)$, et sont dotés des partitions d'information suivantes :*

$$\Pi_A = \{1,7,8,16\}_{\frac{3}{4}}\{2,3,12,15\}_{\frac{1}{4}}\{5,19\}_0 \{4,10,14,18\}_{\frac{1}{4}}\{6,11,17\}_{\frac{2}{3}}\{9,13\}_1$$

$$\Pi_B = \{1,2,17\}_{\frac{2}{3}}\{3,4,6,7\}_{\frac{3}{4}}\{5,9,14,16\}_{\frac{1}{4}} \{8,12,13,18\}_{\frac{3}{4}}\{10,19\}_0\{11,15\}_0$$

Si Alice parle en premier (protocole α), les partitions d'information au consensus sont :

$$\Pi_A^{\alpha} = \{1,7,8\}_1\{16\}_0\{2,15\}_0\{3,12\}_{\frac{1}{2}} \{11\}_0\{10,14\}_0\{4,18\}_{\frac{1}{2}} \{5,19\}_0\{6,17\}_1\{9,13\}_1$$

$$\Pi_B^{\alpha} = \{1\}_1\{2\}_0\{17\}_1\{3,4\}_{\frac{1}{2}}\{6\}_1\{7\}_1\{5\}_0 \{9\}_1\{14\}_0\{16\}_0\{8\}_1\{12,18\}_{\frac{1}{2}}\{13\}_1 \{10\}_0\{19\}_0\{15\}_0$$

Si Bob parle en premier (protocole β), les partitions d'information au consensus sont :

$$\Pi_A^{\beta} = \{1\}_1\{7,8\}_1\{16\}_0\{2\}_0\{3,12\}_{\frac{1}{2}}\{5\}_0 \{10\}_0\{4,18\}_{\frac{1}{2}}\{15\}_0\{14\}_0\{19\}_0 \{6\}_1\{11\}_0\{17\}_1\{9\}_1\{13\}_1$$

$$\Pi_B^{\beta} = \{1,17\}_1\{2\}_0\{3,4\}_{\frac{1}{2}}\{6,7\}_1\{8,13\}_1 \{5,14,16\}_0\{9\}_1\{12,18\}_{\frac{1}{2}} \{10,19\}_0\{11,15\}_0$$

Dans chaque état du monde, Alice et Bob préfèrent parler en second. D'après le Théorème 1, la probabilité consensuelle sera alors la même qu'Alice ou Bob parle en premier, dans chaque état du monde. Cependant, on peut remarquer que la probabilité consensuelle est 1/2 sous l'état 3, alors qu'elle aurait été $f(\{2,3,12,15\} \cap \{3,4,6,7\}) = f(\{3\}) = 1$ si Alice et Bob avaient révélé l'information privée que chacun a reçu sous l'état 3.

5 Discussion

Dans cet article, on s'est intéressé à la question des conséquences du choix d'un protocole de communication dans un groupe d'agents, dans un cadre où les individus préfèrent apprendre de l'information les uns des autres. On a montré que s'il est connaissance commune entre les agents que certains d'entre eux sont en désaccord sur le protocole de communication qu'ils préfèrent utiliser parmi deux protocoles, alors le consensus qui émergera de l'utilisation de l'un ou l'autre protocole sera le même.

La manière dont on a défini les préférences sur les protocoles a deux conséquences. Tout d'abord, elle implique que les agents préfèrent être plus informés toutes choses égales par ailleurs, et s'applique par conséquent uniquement aux situations de décision dans lesquelles les agents valorisent l'information toujours positivement. Dans les situations de jeux, les agents ne peuvent pas préférer les protocoles grâce auxquels ils sont plus informés *toutes choses égales par ailleurs*, puisqu'ils se préoccupent également du montant d'information apprise par leurs opposants au cours du processus de communication.

Une deuxième conséquence de la manière dont on définit les préférences sur les protocoles est qu'elles ne sont pas complètes. En effet, il est possible qu'un agent ne soit pas capable de comparer deux protocoles, puisque deux partitions d'information ne peuvent pas toujours être ordonnées dans le sens du raffinement. Une manière de compléter les préférences serait de les définir de la manière suivante, plus générale. Supposons que chaque agent i ait une fonction d'utilité $U_i : \mathcal{D}_i \times \Omega \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{D}_i$ l'ensemble d'action de l'agent i. On dit que l'agent i préfère un protocole α à un protocole β sous l'état ω il anticipe sous ω qu'il aura une plus grande espérance d'utilité avec le protocole α qu'avec le protocole β, *i.e.* si $E[\max_{d\in\mathcal{D}_i} E(U_i(d,.) \mid \Pi_i^\alpha(.)) \mid \Pi_i(\omega)] > E[\max_{d\in\mathcal{D}_i} E(U_i(d,.) \mid \Pi_i^\beta(.)) \mid \Pi_i(\omega)]$. Cependant, on n'aurait pas le résultat du Théorème 1 dans ce cas : avec de telles préférences, il peut être connaissance commune que deux agents soient en désaccord à propos de deux protocoles, sans que cela n'implique l'égalité des valeurs de consensus.

Exemple 5 *Soit* $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *l'ensemble des états du monde, et considérons trois agents, munis d'une probabilité a priori* P *uniforme sur* Ω. *Les trois agents communiquent la valeur de la fonction* $f(.) = P(\{1,5\} \mid .)$ *selon deux protocoles round-robin. Dans le protocole* α, *l'agent 1 parle secrètement à l'agent 3, qui parle secrètement à l'agent 2, qui parle secrètement à l'agent 1, etc... Dans le protocole* β, *l'agent 2 parle secrètement à l'agent 3, qui parle secrètement à l'agent 1, qui parle secrètement à l'agent 2, etc... Les trois agents sont munis des partitions d'information suivantes :*

$$\Pi_1 = \{1,2,6,7\}_{\frac{1}{4}}\{3,4,5\}_{\frac{1}{3}}$$
$$\Pi_2 = \{1,2,3,7\}_{\frac{1}{4}}\{4,5,6\}_{\frac{1}{3}}$$
$$\Pi_3 = \{1,3,4\}_{\frac{1}{3}}\{2,5,6,7\}_{\frac{1}{4}}$$

Si le protocole α *est utilisé, les partitions d'information au consensus sont :*

$$\Pi_1^\alpha = \{1\}_1\{2,6,7\}_0\{3,4\}_0\{5\}_1$$
$$\Pi_2^\alpha = \{1\}_1\{2,3,7\}_0\{4,6\}_0\{5\}_1$$
$$\Pi_3^\alpha = \{1\}_1\{3,4\}_0\{2,6,7\}_0\{5\}_1$$

Si le protocole β *est utilisé, les partitions d'information au consensus sont :*

$$\Pi_1^\beta = \{1,6\}_{\frac{1}{2}}\{2,7\}_0\{3,5\}_{\frac{1}{2}}\{4\}_0$$
$$\Pi_2^\beta = \{1,3\}_{\frac{1}{2}}\{2,7\}_0\{4\}_0\{5,6\}_{\frac{1}{2}}$$
$$\Pi_3^\beta = \{1,3\}_{\frac{1}{2}}\{4\}_0\{2,7\}_0\{5,6\}_{\frac{1}{2}}$$

On peut facilement trouver une fonction d'utilité commune aux agents 1 et 2 telles qu'il soit connaissance commune entre les agents 1, 2 et 3 qu'ils ont des préférences opposées sur α et β. Supposons que l'ensemble d'actions des agents 1 et 2 soit $\mathcal{D} = \{x, y\}$, et qu'ils soient munis de la fonction d'utilité suivante :

$$U(x,\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in \{1,3,4\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$U(y,\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in \{2,5,6,7\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Munis de cette fonction d'utilité, les décisions des agents 1 et 2 à l'issue du processus de communication seraient les suivantes :

Agent 1 :

$\Pi_1^\alpha = \{1\}_x\{2,6,7\}_y\{3,4\}_x\{5\}_y$

$\Pi_1^\beta = \{1,6\}_{x\ ou\ y}\{2,7\}_y\{3,5\}_{x\ ou\ y}\{4\}_x$

Agent 2 :

$\Pi_2^\alpha = \{1\}_x\{2,3,7\}_{x\ ou\ y}\{4,6\}_{x\ ou\ y}\{5\}_y$

$\Pi_2^\beta = \{1,3\}_x\{2,7\}_y\{4\}_x\{5,6\}_y$

L'agent 1 ne commet d'erreur dans aucun état à l'issue du protocole α, alors qu'il en commet nécessairement une dans les états 1, 6, 3 et 5 à l'issue du protocole β. Ainsi, l'agent 1 préfère α à β dans tous les états du monde. De même, l'agent 2 ne commet d'erreur dans aucun état à l'issue du protocole β, alors qu'il en commet nécessairement une dans les états 2, 3, 7, 4 et 6 à l'issue du protocole α. Ainsi, l'agent 2 préfère β à α dans tous les états du monde. Par conséquent, il est connaissance commune entre les agents 1, 2 et 3 que 1 et 2 ont des préférences opposées sur α et β, bien que la valeur consensuelle de f ne soit pas la même avec α et β. Sous l'état 1 par exemple, la valeur consensuelle de la probabilité de $\{1,5\}$ est 1 avec le protocole α, et est 1/2 avec le protocole β.

Annexe : Démonstration du Théorème 1

Soit un modèle d'information $I = \langle \Omega, (\Pi_i)_i, f \rangle$, et α, β deux protocoles distincts. Montrons que si les assertions (1) et (2) du Théorème 1 sont vraies, alors l'assertion (3) est fausse. On montre que s'il existe deux agents i, j et un état ω tels que $B_i^I(\alpha,\beta)$ and $B_j^I(\beta,\alpha)$ sont connaissance commune en ω, alors $f(\Pi^\alpha(\omega)) = f(\Pi^\beta(\omega))$. Clairement, le résultat tient toujours si l'on échange α et β.

Rappelons que $M(\omega)$ désigne l'union des partitions individuelles avant que la communication n'ait lieu : $M = \bigwedge_{i=1}^n \Pi_i$, et que Π^α désigne l'union des partitions individuelles au consensus, étant donné le protocole α : $\Pi^\alpha = \bigwedge_{i=1}^n \Pi_i^\alpha$.

Si $B_i^I(\alpha,\beta)$ et $B_j^I(\beta,\alpha)$ sont connaissance commune en ω, alors on a

$$M(\omega) \subseteq B_i(\alpha,\beta) \cap B_j(\beta,\alpha)$$

Comme $\Pi^\alpha(\omega) \subseteq M(\omega)$ et $\Pi^\beta(\omega) \subseteq M(\omega)\ \forall\ \omega$, on a $\Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega) \subseteq M(\omega)\ \forall\ \omega$. Par conséquent, on a

$$\Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega) \subseteq B_i^I(\alpha,\beta) \cap B_j^I(\beta,\alpha) \tag{1}$$

Soit $\omega' \in \Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)$ (qui n'est pas vide puisque $\omega \in \Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)$). Par définition de l'union des partitions, on a $\Pi_i^\alpha(\omega') \subseteq \Pi^\alpha(\omega')$ et $\Pi_i^\beta(\omega') \subseteq \Pi^\beta(\omega')$. Comme $\omega' \in \Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)$, on a $\Pi^\alpha(\omega') = \Pi^\alpha(\omega)$ et $\Pi^\beta(\omega') = \Pi^\beta(\omega)$. Par conséquent,

$$\Pi_i^\alpha(\omega') \subseteq \Pi^\alpha(\omega) \text{ et } \Pi_i^\beta(\omega') \subseteq \Pi^\beta(\omega) \tag{2}$$

D'après (1), $\omega' \in B_i^I(\alpha,\beta)$. Cela implique que $\Pi_i^\alpha(\omega') \subseteq \Pi_i^\beta(\omega')$. Cependant,

$\Pi_i^\beta(\omega') \subseteq \Pi^\beta(\omega)$ by (2). On a par conséquent

$$\Pi_i^\alpha(\omega') \subseteq \Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)$$

Comme c'est le cas pour tout $\omega' \in \Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)$, on a

$$\Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega) = \bigcup_{\omega' \in \Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)} \Pi_i^\alpha(\omega')$$

D'après la Proposition 1 et Parikh et Krasucki [1990], $\forall \ i, j, \ f(\Pi_i^\alpha(\omega)) = f(\Pi_j^\alpha(\omega))$ pour tout ω. Par définition de l'union, cela implique que $\forall \ \omega' \in \Pi^\alpha(\omega)$, $f(\Pi_i^\alpha(\omega') = f(\Pi_i^\alpha(\omega))$. Comme f est convexe, f est aussi stable par l'union, et par conséquent $f(\Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)) = f(\Pi^\alpha(\omega))$.

Le même raisonnement appliqué à $\Pi_j^\beta(\omega)$ implique que $f(\Pi^\alpha(\omega) \cap \Pi^\beta(\omega)) = f(\Pi^\beta(\omega))$.

Ainsi, $f(\Pi^\alpha(\omega)) = f(\Pi^\alpha(\omega))$ $\square$

Références

[1] Aumann R. J., [1976], Agreeing to Disagree, *The Annals Of Statistics*, **4**, 1236-1239.

[2] Bacharach M., [1985], Some Extensions of a Claim of Aumann in an Axiomatic Model of Knowledge, *Journal of Economic Theory*, **37**, 167-190.

[3] Blackwell D., [1953], Equivalent Comparison of Experiments, *Annals of Mathematical Statistics*, **24**, pp 265-272.

[4] Cave J., [1983], Learning To Agree, *Economics Letters*, **12**, 147-152.

[5] Geanakoplos J., Polemarchakis H., [1982], We Can't Disagree Forever, *Journal Of Economic Theory*, **26**, 363-390.

[6] Koessler F., [2001], Common knowledge and consensus with noisy communication, *Mathematical Social Sciences*, **42**, pp 139-159.

[7] Parikh R., Krasucki P., [1990], Communication, Consensus and Knowledge, *Journal of Economic Theory*, **52**, 178-189.

[8] Sebenius and Geanakoplos J., [1983], Don't bet on it : contingent agreements with asymmetric information , *Journal of the American Statistical Association*, **78**, 424-426.

Remerciements

Nous remercions Françoise Forges, John Geanakoplos, Frédéric Koessler, Yaw Nyarko, Dov Samet, Jean-Marc Tallon, Jean-Christophe Vergnaud et Nicolas Vieille, ainsi que trois rapporteurs anonymes, pour leur nombreux commentaires. Ce travail a été réalisé avec le soutien financier du Ministère Français de la Recherche (Actions Concertées Incitatives).